Pregunta (1)

$$\lim_{x \to a} \left[\left(\frac{\sin(x)}{\sin(a)} \right)^{\frac{1}{x-a}} \right] \to e^{\frac{\cos(a)}{\sin(a)}}$$

Dada la indeterminacion 1^infty se toma neperiano para quedar

$$\lim_{x \to a} \left(e^{\frac{1}{x-a} \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{\sin(a)}\right)} \right) = e^{\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{x-a} \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{\sin(a)}\right)\right)}$$

La funcion exponencial es continua, por teorema

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{x-a} \cdot \ln\left(\frac{\sin(x)}{\sin(a)}\right)\right) = \frac{0}{0}$$

Por la regla de L'Hopital

$$\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{\sin(x)}{\sin(a)}\right) \to \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$L := \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{\sin(x)}{\sin(a)}\right)}{\left[\frac{d}{dx}(x-a)\right]} \to \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$$

Recordando la exponencial se tendra finalmente: $L_1 := e^L \to e^{\frac{\cos(a)}{\sin(a)}}$

Pregunta (2)

a.- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \ln(x)}}{x \cdot \ln(x)} \, dx$

Realizando el cambio de variable $u^2 = 1 + \ln(x)$ se tiene que $2u \cdot du = \frac{1}{x} dx$

Por lo que $\displaystyle\int \frac{2u^2}{u^2 - 1} \, du$ Fracciones simple $2 \frac{u^2}{u^2-1} = 1 + \frac{1}{u^2-1} = 1 + \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$

Donde $A := \frac{1}{2}$ $B := \frac{-1}{2}$ Por lo que

$$I(u) := \int 2\left(1 + \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}\right) du \to 2 \cdot u + \ln(u-1) - \ln(u+1) + C$$

Regresando el cambio de variable se tendra

$$I(x) := 2\sqrt{1+\ln(x)} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+\ln(x)}-1}{\sqrt{1+\ln(x)}+1}\right) + C \qquad \text{RESPUESTA}$$

b.-

$$\int \frac{3}{(1-x)\cdot\left(x^2+x+1\right)}\,dx$$

Aplicando el metodo de fracciones simple se tiene

$$\frac{3}{(1-x)\cdot\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B\cdot x + C}{x^2+x+1} \qquad \text{Donde} \quad A := 1 \quad B := 1 \quad C := 2$$

Por lo que la integral queda $\displaystyle \int \frac{A}{1-x} + \frac{B\cdot x + C}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{A}{1-x}\,dx + \int \frac{B\cdot x + C}{x^2+x+1}\,dx$

Donde $\displaystyle I_1 := \int \frac{A}{1-x}\,dx \rightarrow -\ln(x-1) + C$

y ademas $\displaystyle I_2 := \int \frac{B\cdot x + C}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+1+3}{\left(x^2+x+1\right)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{3}{x^2+x+1}\,d$

Donde $\displaystyle I_3 := \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \rightarrow \ln\left(x^2+x+1\right) + C$

Completando cuadrados es I.4 $\displaystyle I_4 := \int \frac{3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx \rightarrow 2\cdot\sqrt{3}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3}\right] + C$

Culminando el ejercicio.

$$I(x) := I_1 + \frac{1}{2}\left(I_3 + I_4\right) \rightarrow \frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{2} - \ln(x-1) + \sqrt{3}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3}\right] + C$$

Pregunta (3)

Resolvemos la integral impropia, por partes

$$\int \frac{\operatorname{atan}(x)}{x^2}\,dx \rightarrow \ln(x) - \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2} - \frac{\operatorname{atan}(x)}{x}$$

Evaluando los limites impropio,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left[\ln(\alpha) - \frac{\ln\left(\alpha^2+1\right)}{2} - \frac{\operatorname{atan}(\alpha)}{\alpha} - \left(\frac{-\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

Pregunta (4)

Integrando se tiene

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+1}\,dx \rightarrow \operatorname{atan}(a) \quad \text{igual} \quad \int_a^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx \rightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(a)$$

Por lo que de la igualdad $\operatorname{atan}(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(a)$ implica $\operatorname{atan}(a) = \frac{\pi}{4}$ luego $a := 1$